Teoria do Risco
Aula 18

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

- Notas de aula da disciplina Teoria do Risco oferecida pelo curso de Bacharelado em Ciências Atuariais da Universidade federal de Alfenas, Campus Varginha.

PIRES,M.D. Processo para sinistros agregados. [Notas de aula]. Universidade Federal de Alfenas, Curso de Ciências Atuariais, Alfenas, 2025. Disponível em: https://atuaria.github.io/portalhalley/notas_TR.html. Acessado em: 28 jun. 2025.

O processo de Poisson Homogêneo para frequência de Sinistros

- Outra propriedade importante do processo de Poisson Homogêneo vem do fato de que sua intensidade ser constante no tempo, e isso permite que o tempo entre sinistros obedece uma distribuição exponencial.

- Considere a probabilidade de que não ocorra sinistros dentre de um intervalo t:

$$P(N_t = 0) = \frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!} = e^{-\lambda t}$$

O processo de Poisson Homogêneo para frequência de Sinistros

- Ao se definir N_t e N_{t+s} como a frequência de sinistros ocorridos até os instantes t e $t+s$, tem-se:

$$P(N_{t+s} - N_t = 0) = P(N_s = 0) = \frac{(\lambda s)^0 e^{-\lambda s}}{0!}$$

- Esse resultado pode ser entendido como a probabilidade de espera entre um sinistro e outro (evento), neste caso, pode-se dizer que o tempo necessário para ocorrer um sinistro é maior que s.

O processo de Poisson Homogêneo para frequência de Sinistros

- Ao se definir uma variável aleatória T como o intervalo de tempo entre dois sinistros, tem-se:

$$P(T > s) = P(N_s = 0) = P(N_{t+s} - N_t = 0) = \frac{(\lambda s)^0 e^{-\lambda s}}{0!} = e^{-\lambda s}$$

$$P(T > s) = e^{-\lambda s}$$

- A probabilidade de que o tempo entre dois sinistros seja menor que um intervalo s, implica que o número de sinistros ocorridos nesse intervalo é maior que 0.

$$P(T < s) = P(N_s > 0) = 1 - e^{-\lambda s}$$

Portanto $T \sim Exp(\lambda)$, $t > 0$ e $\lambda > 0$.

O processo de Poisson Homogêneo para frequência de Sinistros

- Portanto ao se definir $\{N_t, t \geq 0\}$ como um processo de Poisson homogêneo com intensidade λ, é estabelecido que o tempo entre dois sinistros, T, possui distribuição exponencial com parâmetro λ, logo:

$F_T(t) = 1 - e^{-t\lambda}$ Distribuição acumulada de T.

$\bar{F}_T(t) = e^{-t\lambda}$ Função de sobrevivência de T (Excesso de Danos).

$f_T(t) = \lambda e^{-t\lambda}$ Função densidade de T.

$E(T) = \frac{1}{\lambda}$ Valor esperado de T.

$var(T) = \frac{1}{\lambda^2}$ Variância de T.

$M_T(r) = \frac{\lambda}{\lambda - r}$ Função geradora de momentos de T.

O processo de Poisson Homogêneo para frequência de Sinistros

- I) A probabilidade do tempo de espera entre dois sinistros decai exponencialmente com o passar do tempo.

$$T \sim Exp(\lambda)$$

- II)A variável aleatória que representa a soma de durações exponencialmente distribuídas (idênticas), $K_j = \sum_{i=1}^{j} T_i$, apresenta distribuição gama com parâmetros j e λ, ou seja o instante exato do j- *ésimo* sinistro

$$K_j \sim Gamma(j, \lambda)$$

- III) Dado que exatamente n sinistros ocorrem no intervalo $[0, t]$, ou seja, $N_t = n$, os tempos específicos de ocorrência desses sinistros (os K_j) são uniformemente distribuídos em $[0, t]$, após ordenação. Isso é conhecido como processo de ordem.

O processo de Poisson Homogêneo para frequência de Sinistros

- lV) A probabilidade de que seja necessário esperar mais s até que o evento aconteça, dado que esse evento não aconteceu antes de t, é a mesma de que esse evento ocorra depois dos s iniciais.

$$P(T > t + s | T > t) = P(T > s)$$

*Propriedade da perda de memória: Dentre as distribuições contínuas, a exponencial é a única a possuir tal propriedade.

Consequentemente

$$E(T) = E(T | T > s)$$

O processo de Poisson Homogêneo para frequência de Sinistros

Considere uma carteira em que a frequência histórica relativa de ocorrência anual de sinistros é de 2 sinistros por ano, ou seja $\lambda = 2$.

1) Tempo entre sinistros ($\boldsymbol{T}$)

Isso implica em $T \sim Exp(2)$, logo 1 sinistro a cada 0,5 anos

2) Tempo Absoluto de ocorrência de sinistros ($\boldsymbol{K_j}$)

Implica em $K_j \sim Gamma(j, 2)$, sendo assim, para o 1° sinistro $K_1 \sim Gamma(1,2)$, para o 2° $K_2 \sim Gamma(2,2)$ pois a soma o segundo sinistro acontece após a soma de dois tempos exponenciais.

3)Processo de ordem

Suponha que sabemos, com certeza, que em um período de 5 anos ocorreram exatamente 3 sinistros, ou seja $N_5 = 3$. Os tempos específicos em que esses sinistros ocorreram seguem uma Distribuição Uniforme Ordenada em [0, 5].

Os 3 sinistros "espalham-se aleatoriamente" dentro do intervalo de 5 anos. Por exemplo $K_1 = 2$ anos, $K_2 = 4$ anos $K_3 = 4{,}8$ anos

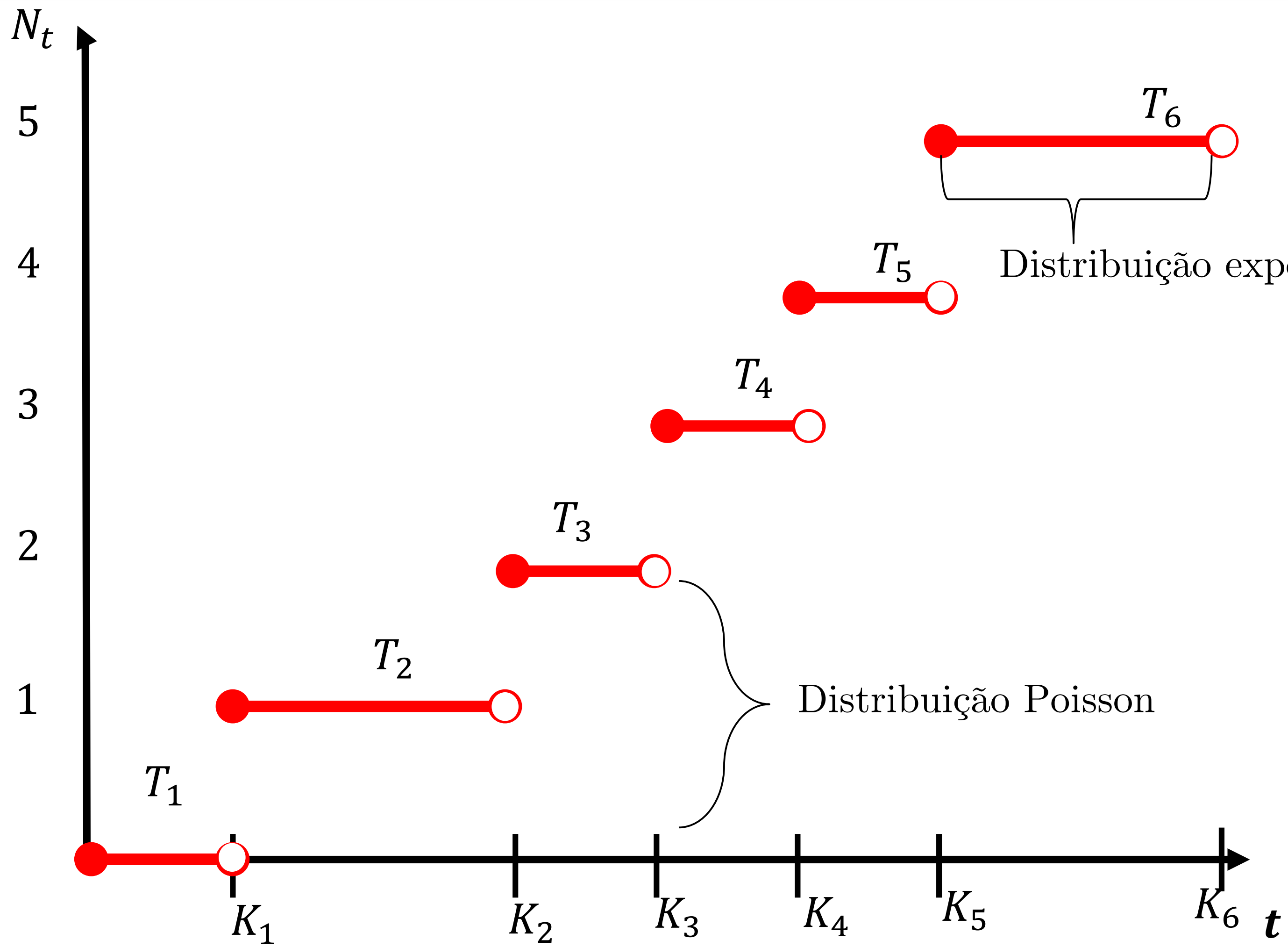
Esses tempos são "uniformes ordenados": eles respeitam o fato de que $0 \leq K_1 \leq K_2 \leq K_3 \leq 5$, e têm a mesma chance de cair em qualquer parte do intervalo.

4)**Perda de memória**

A probabilidade de que seja necessário esperar mais 4 meses até que o evento aconteça, dado que esse evento não aconteceu antes de 8 meses, é dado por

$$P\left(T > \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \middle| T > \frac{2}{3}\right) = P\left(T > \frac{1}{3}\right)$$

Processo de Contagem



- Para todo $i \geq 1$, K_i é o instante da $i-ésima$ indenização.
- $T_1 = K_1$, $T_2 = K_2 - K_1$, $T_n = K_n - K_{n-1}$ tempo entre as indenizações (iid.)
- Função média de um processo pontual $\Lambda(t) = E(N_t) = \lambda t$.

EXEMPLO 1: Denote por T como o tempo decorrido entre $k-1$ *ésimo* sinistro e do k-*ésimo* sinistro de uma carteira de seguros. Suponha que o tempo decorrido entre sinistros independentes e identicamente distribuídos tem a seguinte função densidade de probabilidade

$$f_T(t) = 0{,}04861e^{-0{,}04861t}, t > 0.$$

Em que t é mensurado em lapsos de meia hora. Sendo assim calcule a probabilidade de que pelo menos um sinistro será processado nas próximas duas horas e trinta minutos.

SOLUÇÃO:

Uma vez que a distribuição do tempo decorrido entre dois sinistros é uma exponencial, logo:

$$\lambda = 0{,}04861.$$

Como a função densidade de probabilidade está descrita em duas horas e trinta minutos, então deve-se calcular a probabilidade considerando essa ordem de medida. Dessa forma:

$$P(N_5 \geq 1) = 1 - P(N_5 = 0)$$

$$P(N_5 \geq 1) = 1 - e^{-0{,}04861 \times 5} = 1 - e^{-0{,}24305} \approx 0{,}2157 \approx 21{,}57\%$$

EXEMPLO 2: Considere uma carteira em que a frequência histórica relativa de ocorrência anual de sinistros é de 5 sinistros por ano.

a) Calcule a probabilidade de que o tempo de espera entre dois sinistros consecutivos seja maior que 8 meses.

b) Calcule a probabilidade do intervalo entre dois sinistros ser superior a 10 meses, sabendo-se que nos 2 primeiros meses não ocorreram sinistros.

EXEMPLO 2: Considere uma carteira em que a frequência histórica relativa de ocorrência anual de sinistros é de 5 sinistros por ano.

a) Calcule a probabilidade de que o tempo de espera entre dois sinistros consecutivos seja maior que 8 meses.

$$\overline{F_T}\left(\frac{2}{3}\right) = e^{-5\left(\frac{2}{3}\right)} = 0{,}036$$

EXEMPLO 2: Calcule a probabilidade de que o tempo de espera entre dois sinistros consecutivos seja maior que 8 meses.

$$\overline{F_T}\left(\frac{2}{3}\right) = e^{-5\left(\frac{2}{3}\right)} = 0{,}036$$

b) Calcule a probabilidade do intervalo entre dois sinistros ser superior a 10 meses, sabendo-se que nos 2 primeiros meses não ocorreram sinistros.

$$10\, meses = \frac{5}{6}\ anos \text{ e } 2\, meses = \frac{1}{6}\ anos.$$

$$P\left(T > \frac{5}{6} \middle| T > \frac{1}{6}\right) = \frac{e^{-5\left(\frac{5}{6}\right)}}{e^{-5\left(\frac{1}{6}\right)}} = e^{-5\left(\frac{2}{3}\right)} = 0{,}036 = \overline{F_T}\left(\frac{2}{3}\right)$$

O processo de Poisson para frequência de Sinistros

- A generalização do processo de Poisson é chamada de processo de renovação.

- Se os tempos entre as falhas $T_1, T_2, \dots$ são *iid*, então diz-se que o processo é de renovação,
  - ...não necessariamente a distribuição de T_i precisa ser exponencial.

O processo de Poisson para frequência de Sinistros

- Os processos não homogêneos também apresentando muitas aplicações na análise de risco (são processos mais gerais).

- Processos não Homogêneos (função intensidade não é constante)
  - Acarretando em uma não estacionaridade e/ou
  - não independência nos incrementos.
  - ...Processo misto (intensidade definida por uma variável aleatória)

Processo de Poisson misto de Pólya,

$$\Lambda \sim Gama\,(r, \alpha)$$

$$P(N_t = n) = \binom{n + \alpha - 1}{n} \left(\frac{t}{t + r}\right)^n \left(\frac{r}{t + r}\right)^\alpha$$

- *"...não obedece ao critério de independência nos incrementos, de que modo que não deveria ser classificado como um processo de Poisson (contagem)."*

Processo estocástico de sinistros agregados

$$S_{ind.t} = X_{1.t} + X_{2.t} + X_{3.t} + \cdots + X_{n.t}$$

$$S_{Col.t} = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

$\{N_t, t \geq 0\}$: Processo de contagem **(Processo de Poisson)**

$\{S_{Col.t}, t \geq 0\}$: Processo estocástico de sinistros agregados

X_i : Representa a severidade do $i - ésimo$ sinistro.

Processo de Poisson para modelagem de Sinistros agregados

- Definindo-se $S_{col.t}$ como a severidade acumulada no intervalo de tempo t de acordo como o modelo de risco agregado.

$$S_{col.t} = S_t$$

- O processo estocástico $\{S_t, t > 0\}$ é dito ser um processo de Poisson composto homogêneo se podemos representá-lo da seguinte forma:

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

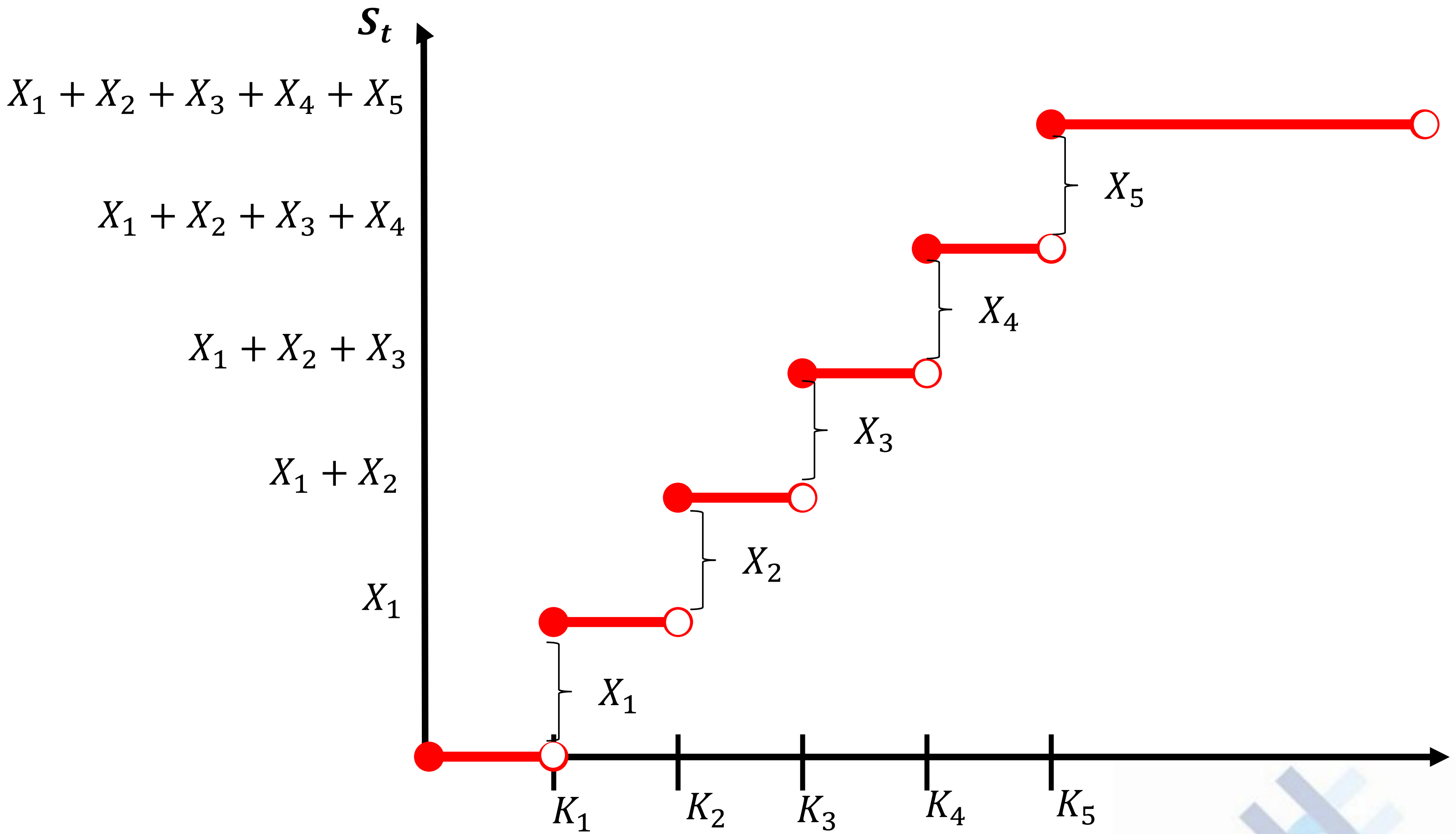
Processo de Poisson para modelagem de Sinistros agregados

$\{N_t, t > 0\}$ é um processo de Poisson homogêneo.

$\{X_i, i > 0\}$ é uma sequencia de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e independentes de $\{N_t, t > 0\}$.

$S_t = 0$ se $N_t = 0$

Processo de Contagem



- Para todo $i \geq 1$, K_i é o instante da $i - ésima$ indenização

A função distribuição convoluta de S_t é será dada por:

$$F_{S_t}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P^{*k}(s) \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

em que $P^{*k}(s) = P(X_1 + X_2 + \cdots + X_k < s)$

Consequentemente temos que:

$$p_{S_t}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p^{*k}(s) \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

em que $p^{*k}(s) = P(X_1 + X_2 + \cdots + X_k = s)$

Processo de Poisson para modelagem de Sinistros agregados

- Sua esperança e variância são dadas por:

$$E(S_t) = \lambda t E(X)$$

$$var(S_t) = \lambda t E(X^2)$$

- Esperança matemática e variância do sinistro agregado para o intervalo de tempo t de um processo estocástico Poisson Homogêneo.

$$M_{S_t}(r) = e^{\lambda t [M_X(r) - 1]}$$

* $M_{S_t}(r)$ existe se $M_X(r)$ existe.

EXEMPLO 3: Considere uma carteira de n apólices idênticas de seguros de danos em que a frequência histórica relativa de ocorrência de sinistros é de 5 sinistros por ano. Considere que a distribuição de probabilidades de severidades tem um comportamento descrito pela distribuição Gama com parâmetros $r = 100$ e $\alpha = 2$, $X \sim Gama(100, 2)$. Supondo que este comportamento se mantenha constante no período de análise e que todas as apólices são renovadas a cada ano. Obtenha a fórmula genérica da função geradora de momentos, esperança matemática e do desvio padrão da distribuição convoluta de sinistros agregados.

- Resp.:

$$M_X(r) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - r}\right)^r \quad E(X) = \frac{r}{\alpha} \qquad var(X) = \frac{r}{\alpha^2}$$

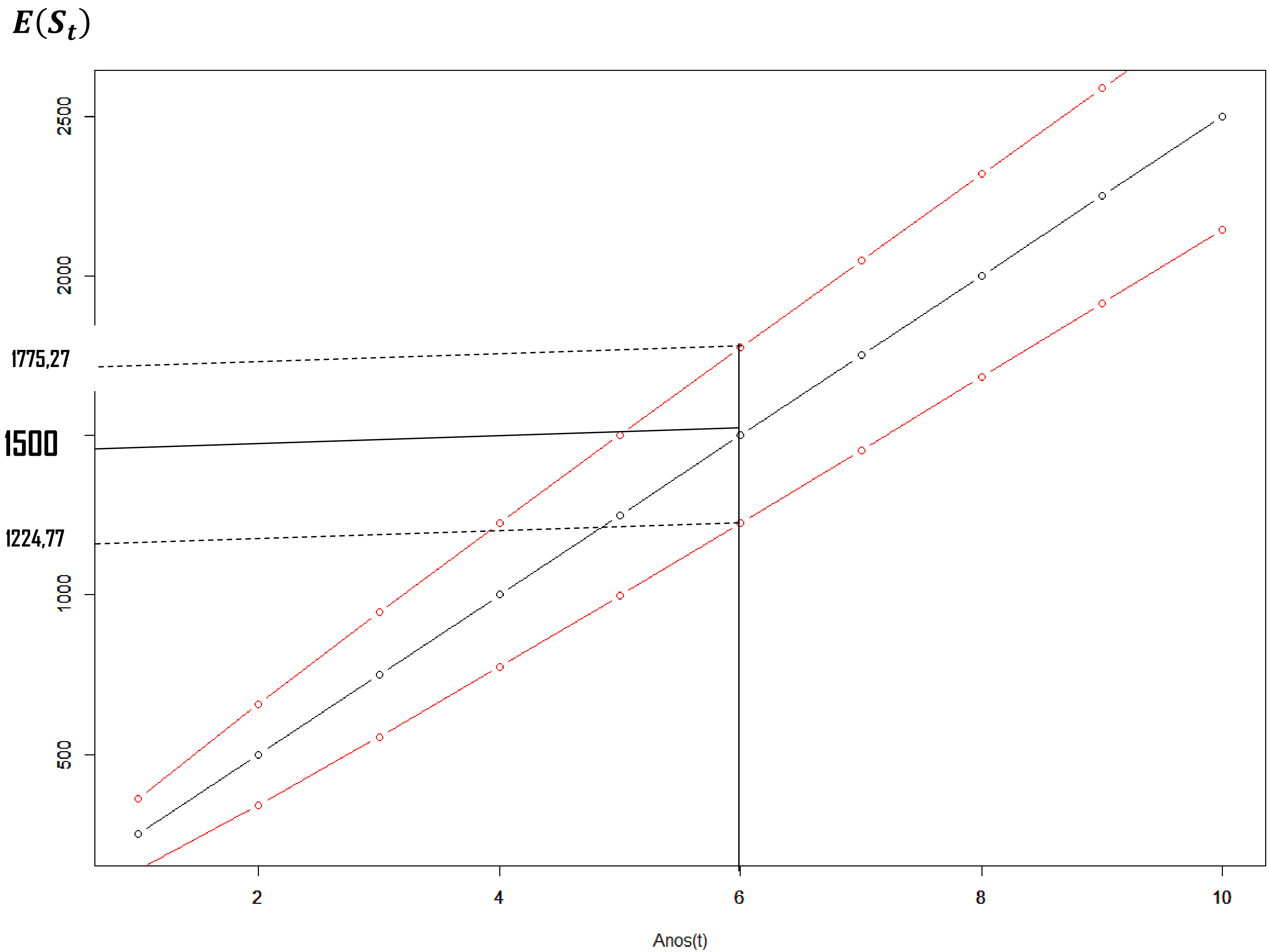
Logo,

$$M_{S_t}(r) = e^{\lambda t\left[\left(\frac{\alpha}{\alpha - r}\right)^r - 1\right]} = e^{5t\left[\left(\frac{2}{2-r}\right)^{100} - 1\right]}$$

$$E(S_t) = \frac{r}{\alpha}(\lambda t) = 5t\left(\frac{100}{2}\right) = 250t$$

$$var(S_t) = \lambda t\left(\frac{r}{\alpha^2} + \frac{r^2}{\alpha^2}\right) = 5t(25 + 50^2) = 12625t$$

$$\sigma_{S_t} = 112{,}361\sqrt{t}$$



$E(S_t)$
2500
2000
1775,27
1500
1224,77
1000
500
2
4
6
8
10
Anos(t)

O processo de Poisson Homogêneo para frequência de Sinistros

Sinistros ocorrem e são pagos imediatamente conforme um processo de Poisson com intensidade λ. A severidade dos sinistros é constante no valor de b. K_n denota o momento em que o sinistros ocorrem (a partir do momento 0). Definindo-se o valor presente dos pagamentos futuros de sinistros até o momento t com taxa de juros igual a δ como:

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} e^{-\delta K_i} b$$

Calcule $E(S_t)$.

O processo de Poisson Homogêneo para frequência de Sinistros

Sinistros ocorrem e são pagos imediatamente conforme um processo de Poisson com intensidade λ. A severidade dos sinistros é constante no valor de b. K_n denota o momento em que o sinistros ocorrem (a partir do momento 0). Definindo-se o valor presente dos pagamentos futuros de sinistros até o momento t com taxa de juros igual a δ como:

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} e^{-\delta K_i} b$$

Calcule $E(S_t)$.

$$E(S_t) = E\left[\sum_{i=1}^{N_t} e^{-\delta K_i} b\right] = bE\left[\sum_{i=1}^{N_t} e^{-\delta K_i}\right] =$$

$$= bE\left\{E\left[\sum_{i=1}^{N_t} e^{-\delta K_i} \,|N_t = n\right]\right\} = b\sum_{n=0}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^{N_t} e^{-\delta K_i} \,|N_t = n\right] P(N_t = n) =$$

$$= b\sum_{n=0}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^{N_t} e^{-\delta K_i} \,|N_t = n\right] \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} =$$

Obs.:

$$E\left[\sum_{i=1}^{N_t} e^{-\delta K_i} \,|N_t = n\right] = E\left(\sum_{i=1}^{n} e^{-\delta K_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} E(e^{-\delta K_i}) =$$

Obs.:

$$E\left[\sum_{i=1}^{N_t} e^{-\delta K_i} \,|N_t = n\right] = E\left(\sum_{i=1}^{n} e^{-\delta K_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} E\left(e^{-\delta K_i}\right) \;=$$

Como os tempos dos sinistros $K_1, K_2, \dots, k_n$ são equivalentes a os n pontos de uma amostra ordenada de uma distribuição uniforme $U(0,t)$. Assim:

$$E\left(e^{-\delta K}\right) = \int_0^t \frac{e^{-\delta k}}{t} dk = \frac{1-e^{-\delta t}}{\delta t}$$

Portanto

$$E\left[\sum_{i=1}^{N_t} e^{-\delta K_i} \,|N_t = n\right] = n\left(\frac{1-e^{-\delta t}}{\delta t}\right)$$

Logo....

$$E(S_t) = E\left[\sum_{i=1}^{N_t} e^{-\delta K_i} b\right] = bE\left[\sum_{i=1}^{N_t} e^{-\delta K_i}\right] =$$

$$= b\sum_{n=0}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^{N_t} e^{-\delta K_i} | N_t = n\right] \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} = b\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{1-e^{-\delta t}}{\delta t}\right)\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$$

$$= b\left(\frac{1-e^{-\delta t}}{\delta t}\right)\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} = b\left(\frac{1-e^{-\delta t}}{\delta t}\right)\lambda t$$

$$E(S_t) = \frac{b\lambda}{\delta}\left(1 - e^{-\delta t}\right)$$

O prêmio para essa carteira será maior quanto maiores forem λ e b e tanto menor quanto δ. E para $t \to \infty$, temos $E(S_t) = \frac{b\lambda}{\delta}$

Bibliografia

- FERREIRA, P. P. **Modelos de precificação e ruína para seguros de curto prazo.** Rio de Janeiro: Funenseg, 2002.
- CENTENO, M. L. **Teoria do risco na actividade seguradora**. Oeiras: Celta, 2003.
- PACHECO, R. **Matemática Atuarial de Seguros de Danos**. Editora Atlas, 2014.
- RODRIGUES, J. A. **Gestão de risco atuarial**. São Paulo: Saraiva, 2008.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos.** Curitiba: CRV 2020.